

ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧИСЛЕННОСТИ ЭКСПЕРТНОЙ ГРУППЫ И КОЛИЧЕСТВА ЭТАЛОННЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА «АНАЛИЗ СРЕДЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ»

Е. П. Моргунов

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. акад. М. Ф. Решетнева
660014, Красноярск, просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31, Россия
emorgunov@mail.ru
тел.: +7 (3912) 91-92-41

Ключевые слова: *эффективность сложных объектов, экспертные оценки, граница эффективности, анализ среды функционирования, Data Envelopment Analysis*

Abstract

Application of artificial efficient frontiers in Data Envelopment Analysis is considered. An approach to solving problem of determining numbers of experts and artificial referential objects is suggested.

Введение

Управление эффективностью является одной из составляющих процесса управления сложными объектами. Для осуществления управления эффективностью объектов необходимо наличие соответствующего инструментария. Такой инструментарий отличается широким разнообразием. Однако существуют методы исследования эффективности, которые могут успешно применяться для работы с различными классами объектов. К их числу можно отнести и метод, известный в России под названием «анализ среды функционирования» (АСФ) [1]. Он был разработан в 1978 г. в США [2] и широко используется на Западе. Там он известен как Data Envelopment Analysis (DEA). Метод АСФ (DEA) применяется для оценки эффективности функционирования однородных объектов в различных сферах: в экономике, здравоохранении, административном управлении, образовании и т. д.

Данный метод имеет целый ряд достоинств, однако его недостатком является то, что он позволяет получить показатель только *относительной* эффективности объектов путем сопоставления их друг с другом. Для преодоления этого недостатка необходимо использование знаний экспертов.

Таким образом, цель статьи заключается в повышении обоснованности экспертных оценок, используемых в контексте метода АСФ (DEA).

1 Краткое описание метода «анализ среды функционирования»

Метод АСФ (DEA) относится к классу граничных методов. Он основан на построении так называемой границы эффективности в многомерном пространстве входных и выходных переменных, описывающих объекты, эффективность которых требуется определить. Степень эффективности зависит от расстояния между объектом и границей эффективности. Эта граница строится по реальным данным и представляет собой, по сути, оценку производственной функции для случая, когда выход является векторным.

Представим формализованное описание метода на примере одной из его моделей. Пусть требуется определить показатель эффективности каждого из n объектов. Такими объектами могут быть предприятия, организации, университеты, банки и т. д. Для описания каждого объ-

екта o_j , $j = \overline{1, n}$, служит пара векторов $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$. При этом вектор $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{ji}, \dots, x_{jm})^T$ содержит входные показатели (входы) для объекта o_j , а вектор $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, \dots, y_{jr}, \dots, y_{js})^T$ содержит выходные показатели (выходы) для объекта o_j . Тогда матрица $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_j)$, имеющая размерность $m \times n$, содержит вектор-столбцы с входными данными для всех n объектов, а матрица $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_j)$, имеющая размерность $s \times n$, содержит вектор-столбцы с выходными данными для всех n объектов. В основе метода АСФ (DEA) лежит метод линейного программирования, поэтому модель формулируется в таком виде [3, с. 43]:

$$(1) \quad \begin{aligned} \min_{\theta, \lambda} & \theta, \\ & -\mathbf{y}_j + \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{0}, \\ & \theta \mathbf{x}_j - \mathbf{X}\lambda \geq \mathbf{0}, \\ & \lambda \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Скаляр θ и является мерой эффективности j -го объекта. Важно отметить, что $\theta \in (0; 1]$. Критерием эффективности объекта является условие $\theta = 1$. Объекты, имеющие такое значение показателя θ , считаются эффективными и находятся, как принято говорить, на *границе эффективности*. Аналогичная задача решается для каждого объекта, т. е. n раз.

Для объектов, имеющих $\theta < 1$, предлагаются рекомендуемые (целевые) значения показателей, достигнув которых, эти объекты также окажутся на границе эффективности. Определение целевых значений переменных для неэффективного объекта производится путем *проецирования* данного объекта на границу эффективности. Проецирование обеспечивается за счет присутствия в модели (1) коэффициента θ при векторе \mathbf{x}_j и наличием ограничения $\lambda \geq \mathbf{0}$. Вектор констант $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)^T$ позволяет сформировать неотрицательную линейную комбинацию объектов, которая и будет являться гипотетическим (и при этом – эффективным) целевым объектом для того реального объекта, который оказался неэффективным. В этой линейной комбинации веса эффективных объектов будут ненулевыми, а веса неэффективных объектов будут равны нулю (т. е. $\lambda_j = 0$). Объекты, которые входят в эту линейную комбинацию с ненулевыми весами, называются эталонными. Значения коэффициентов λ_j отражают степень подобия неэффективного объекта эталонным объектам с точки зрения соотношения значений его показателей.

Пример границы эффективности для простого двухмерного случая показан на рисунке 1 слева. Эффективным здесь будет только объект С. Граница будет иметь вид выпуклого конуса в пространстве входных и выходных переменных \mathbf{R}^{m+s} . Отметим, что эта граница – понятие условное: она определяется эффективными (крайними) точками. Поскольку граница эффективности имеет вид выпуклого конуса, то это соответствует предположению о постоянном эффекте масштаба, имеющем место в данной совокупности исследуемых объектов.

Модель (1) называется *ориентированной на вход*. Это объясняется тем, что коэффициент θ оказывает влияние на вектор входных переменных. При проецировании неэффективного объекта, например, А, на границу эффективности значения входов уменьшаются. На рисунке 1 направление проецирования для модели (1) показано горизонтальной стрелкой. Гипотетический объект А' будет целевым объектом для объекта А. Таким образом, граница эффективности служит в качестве эталона для проведения оценки эффективности объектов в исследуемой совокупности.

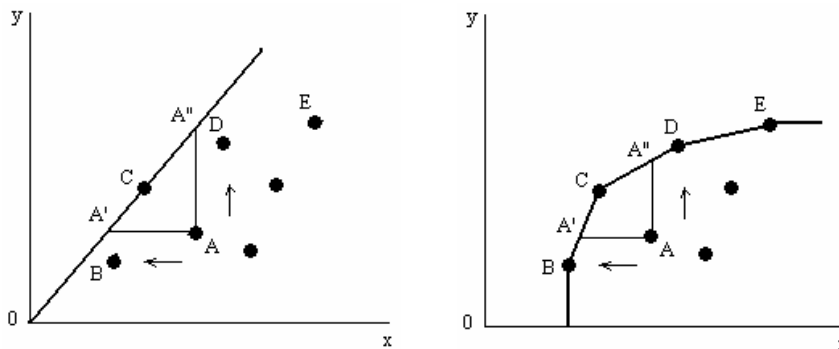
Модель, *ориентированная на выход*, может быть построена аналогично [3, с. 58] (при этом изменяется направление проецирования объектов, которое на рисунке 1 показано вертикальной стрелкой):

$$(2) \quad \begin{aligned} & \max_{\varphi, \lambda} (\varphi), \\ & -\varphi y_j + Y\lambda \geq 0, \\ & x_j - X\lambda \geq 0, \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

В данном случае показатель эффективности – скаляр $\varphi \in [1; \infty)$. Для неэффективных объектов (имеющих $\varphi > 1$) будут выданы рекомендации по пропорциональному увеличению значений выходных переменных в φ раз. При этом значения входных переменных увеличиваться не должны. На практике значение показателя эффективности зачастую переводится в диапазон $(0; 1]$ за счет использования обратной величины $1 / \varphi$.

В модели (1) и (2) может быть введено дополнительное ограничение $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, что приведет к изменению конфигурации границы эффективности – она приобретет форму выпуклой оболочки. Иллюстрация приведена на рисунке 1 справа. Соответственно, гипотетический целевой объект, который будет являться эталоном для неэффективного объекта, будет формироваться как выпуклая линейная комбинация эффективных объектов $(X\lambda, Y\lambda)$. Выпуклой оболочке соответствует допущение о переменном эффекте масштаба, имеющем место в данной совокупности исследуемых объектов.

На рисунке 1 показано, что, независимо от ориентации модели на вход или на выход, оценивается одна и та же граница эффективности, а изменяется лишь направление проецирования точки в многомерном пространстве \mathbf{R}^{m+s} .



Слева – граница эффективности для случая постоянного эффекта масштаба; справа – граница эффективности для случая переменного эффекта масштаба

Рисунок 1 – Граница эффективности в методе АСФ (DEA)

В моделях (1) и (2) векторы x_j и y_j не обязательно должны принадлежать матрицам X и Y . Они могут быть взяты из другого массива данных (например, за другой временной период). Однако в этом случае их размерности должны быть согласованы с размерностью матриц. Объект (x_j, y_j) сопоставляется с выпуклым конусом (выпуклой оболочкой), натянутым на вектор-столбцы матриц X и Y .

Метод АСФ (DEA) в своем базовом варианте позволяет получить показатель только *относительной* эффективности объектов. Зачастую объекты, которые признаны эффективными относительно данной совокупности объектов, также могут улучшить свои показатели. Поэтому ранее для преодоления указанного ограничения метода АСФ (DEA) уже было предложено использовать искусственную границу эффективности в качестве эталона для оценки реальных объектов [4, 5]. Для построения такой границы эффективности достаточно сформировать мат-

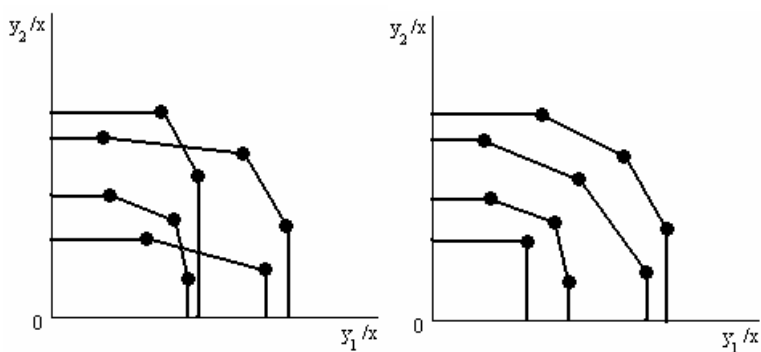
рицы входов \mathbf{X} и выходов \mathbf{Y} для совокупности *эталонных* объектов. Экспертные методы формирования эталонных искусственных границ эффективности предлагались, в частности, в работах [6, 7]. Важно отметить, что при использовании искусственных границ эффективности значение показателя эффективности может превышать единицу, поскольку оцениваемый объект может находиться в многомерном пространстве входов/выходов «снаружи» выпуклого конуса (выпуклой оболочки), натянутого на точки, соответствующие эталонным объектам.

2 Предлагаемый подход к решению проблемы

Предлагаемый подход является эмпирическим и является развитием идей, предложенных в работе [6]. Для того чтобы облегчить понимание нашего подхода, кратко изложим основные идеи работы [6].

Пусть сформирована группа из P экспертов p_k , $k = \overline{1, P}$. Каждый эксперт должен сформировать эталонную границу эффективности F_k , т. е. матрицы входных \mathbf{X}_k (размерности $m \times n_k$) и выходных \mathbf{Y}_k (размерности $s \times n_k$) показателей для эталонных объектов. Затем эти эталонные объекты объединяются в общую совокупность (это достигается путем объединения матриц \mathbf{X}_k и \mathbf{Y}_k в матрицы \mathbf{X} и \mathbf{Y} таким образом, что число столбцов у новых матриц будет равно $n = \sum_{k=1}^P n_k$). Для формирования обобщенной границы эффективности на основе индивидуальных экспертных границ эффективности используется такой подход: сначала вся полученная совокупность эталонных объектов, сформированных экспертами, разделяется на так называемые «слои эффективности», а затем один из них выбирается в качестве обобщенной границы эффективности.

Иллюстрация процесса формирования обобщенной границы эффективности для модели, ориентированной на выход, приведена на рисунке 2. При этом по осям координат отложены удельные выпуски продуктов y_1 и y_2 , что допустимо при условии постоянного эффекта масштаба.



Слева изображены границы эффективности, сформированные отдельными экспертами. Справа изображены «слои эффективности»

Рисунок 2 – Формирование «слоев эффективности»

Задача «расслоения» эталонных объектов решается путем многократного применения модели (1) или (2) к общей совокупности эталонных объектов, из которой после каждого применения указанных моделей исключаются те объекты, показатель эффективности которых равен 1. Каждая группа таких объектов и образует «слой эффективности». Затем из полученных «слоев эффективности» выбирается один в качестве обобщенной границы эффективности. Это выполняется путем вычисления среднего отклонения значений показателя эффективности всех эталонных объектов относительно границы-кандидата, в качестве которой поочередно

выступают все «слои эффективности». Та граница, для которой абсолютная величина этого показателя (т. е. взятая по модулю) окажется наименьшей, и выбирается в качестве результирующей, т. е. обобщенной границы эффективности группы экспертов. Говоря другими словами, в качестве обобщенной границы эффективности выбирается тот «слой эффективности», разброс точек относительно которого будет наименьшим.

А теперь перейдем к изложению подхода к решению задачи, вынесенной в заглавие.

Почему возникает вопрос о численности экспертов и количестве эталонных объектов? На наш взгляд, два наиболее важных объяснения следующие.

- 1) Не должно иметь места превосходство одних экспертов над другими (в смысле влияния на обобщенную границу эффективности), которое возникло бы только из-за различия в количествах эталонных объектов, сформированных разными экспертами.
- 2) Должно быть обеспечено требуемое качество обобщенной эталонной границы эффективности.

Предлагаемый нами подход сводится к совокупности рекомендаций, следование которым должно позволить выполнить оба эти требования.

В начале работы каждый эксперт p_k должен определить диапазоны допустимых изменений значений всех переменных, как входных x_i , так и выходных y_r . Получим: $\Delta_{x_i}^k = \max x_i^k - \min x_i^k$, $i = \overline{1, m}$, $\Delta_{y_r}^k = \max y_r^k - \min y_r^k$, $r = \overline{1, s}$, $k = \overline{1, P}$ (обозначения были введены в разделе 1).

Поскольку в данном случае важны относительные изменения величин, то найдем отношения величины диапазона изменений к максимальному значению переменной: $\delta_{x_i}^k = \Delta_{x_i}^k / \max x_i^k$, $i = \overline{1, m}$, $\delta_{y_r}^k = \Delta_{y_r}^k / \max y_r^k$, $r = \overline{1, s}$, $k = \overline{1, P}$. Если найденные относительные диапазоны для разных экспертов отличаются на большую величину, скажем, на порядок, то необходимо выяснить, чем это объясняется, прежде чем продолжать процедуру выявления и обобщения знаний экспертов.

Затем необходимо определить, является ли непустым пересечение областей V_k , $k = \overline{1, P}$, многомерного пространства \mathbf{R}^{m+s} , в которые вписываются индивидуальные экспертные границы эффективности. Это легко сделать на основе следующей информации: $\max x_i^k$, $\min x_i^k$, $i = \overline{1, m}$, $\max y_r^k$, $\min y_r^k$, $r = \overline{1, s}$, $k = \overline{1, P}$. Если $\bigcap_{k=1}^P V_k = \emptyset$, то продолжать процедуру выявления и обобщения знаний экспертов, на наш взгляд, нецелесообразно до выяснения причин этого факта, хотя алгоритмы, предложенные в работе [6] и позволят провести обобщение таких границ. Выполнение условия пересечения областей должно показать, что мнения экспертов не являются взаимоисключающими.

Для того чтобы определить необходимое количество эталонных объектов, формируемых каждым экспертом, используем понятие шага изменения значения переменной. Пусть S_{x_i} – шаг изменения значения входной переменной x_i , а S_{y_r} – шаг изменения значения выходной переменной y_r . Шаг должен быть задан экспертам по каждой переменной на основе обобщения информации об относительных диапазонах изменений значений переменных, выявленных у разных экспертов. В результате число объектов n_k , формируемых экспертом p_k , можно прибли-

зительно оценить как
$$n_k = \prod_{i=1}^m \frac{\Delta_{x_i}^k}{S_{x_i}} \prod_{r=1}^s \frac{\Delta_{y_r}^k}{S_{y_r}}$$

При определении числа экспертов важно учесть, что влияние каждого эксперта на обобщенную оценку должно быть заметным, но не подавляющим. Априорно оценивать степень влияния W_k эксперта p_k предлагается на основе уровня его компетентности h_k по формуле

$W_k = h_k / \sum_{k=1}^P h_k$. Степень влияния каждого эксперта зависит как от уровня его компетентности, так и от числа экспертов. Например, если число экспертов $P = 10$, и они имеют равные уровни компетентности, то $W_k = 0,1, k = 1, P$.

Допустимый диапазон значений степени влияния должен быть задан заранее лицом, принимающим решения (ЛПР). Также ЛПР должен задать максимальное допустимое отношение степеней влияния экспертов в экспертной группе: $\overline{W} = \max_k W_k / \min_k W_k$. Таким образом, число экспертов подбирается с учетом этих двух ограничений.

Заключение

Предложенные рекомендации, на наш взгляд, позволят повысить обоснованность принятия решений по оценке эффективности сложных объектов. Отметим вместе с тем, что это лишь слабоформализованные рекомендации. В качестве направлений дальнейших исследований в данной области могут быть предложены, например:

- выявление зависимости числа экспертов и числа эталонных объектов от способа обобщения индивидуальных эталонных границ эффективности (по всей вероятности, может быть предложен способ, отличный от способа, основанного на формировании «слоев эффективности»);
- формирование многоэтапных процедур взаимодействия экспертов, когда каждый эксперт мог бы скорректировать свою эталонную границу на основании некоторых промежуточных результатов обобщения мнений экспертов;
- эффективная компьютерная реализация.

Список литературы

- [1] Анализ эффективности функционирования сложных систем [Текст] / В. Е. Кривоножко, А. И. Пропой, Р. В. Сеньков, И. В. Родченков, П. М. Анохин // Автоматизация проектирования. – 1999. – № 1. – С. 2–7.
- [2] Charnes, A. Measuring the Efficiency of Decision Making Units [Text] / A. Charnes, W. W. Cooper, E. Rhodes // European Journal of Operational Research. – 1978. – Vol. 2. – P. 429–444.
- [3] Cooper, W. W. Data Envelopment Analysis [Text] : A Comprehensive Text with Models, Applications, References, and DEA-Solver Software / W. W. Cooper, L. M. Seiford, K. Tone.– Boston : Kluwer Academic Publishers, 2000. – 318 p.
- [4] Sowlati, T. Establishing the «Practical Frontier» in Data Envelopment Analysis [Text] / T. Sowlati, J. C. Paradi // International DEA Symposium «Efficiency and Productivity Analysis in the 21st Century», 24–26 June 2002 (Moscow, Russia) : Abstracts / Institute for Systems Analysis of Russian Academy of Sciences; Global S. Consulting Company. – Moscow : International Research Institute of Management Sciences, 2002. – P. 32–33.
- [5] Sowlati, T. Establishing the «practical frontier» in data envelopment analysis [Text] / Taraneh Sowlati, Joseph C. Paradi // Omega. – 2004. – Vol. 32. – P. 261–272.
- [6] Моргунова, О. Н. Экспертные методы формирования искусственных границ эффективности [Текст] / О. Н. Моргунова // Научное обозрение. – 2006. – № 5. – С. 61–65.
- [7] Моргунов, Е. П. Многомерная классификация сложных объектов на основе оценки их эффективности [Текст] / Е. П. Моргунов, О. Н. Моргунова // Вестник НИИ СУВПТ: сб. науч. тр. / Под общ. ред. проф. Н. В. Василенко. – Красноярск, 2003. – Вып. 14. – С. 222–240.