

УДК 519.237.8:519.816

## МНОГОМЕРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ ИХ ЭФФЕКТИВНОСТИ

*Е.П. Моргунов, О.Н. Моргунова*

Сибирский государственный аэрокосмический университет  
имени академика М.Ф. Решетнева

*В статье обобщаются работы авторов, посвященные оценке эффективности сложных систем с использованием метода Data Envelopment Analysis (DEA). Предпринимается попытка наметить направления дальнейшего развития подхода многомерной классификации сложных объектов на основе оценки их эффективности.*

Актуальность развития методов оценки эффективности сложных систем, а также необходимость учета показателей эффективности при управлении сложными иерархическими системами не вызывает сомнений. Одним из продуктивных подходов в этом направлении, на наш взгляд, является соединение принципов многомерной классификации [24] с методами оценки эффективности сложных объектов [1, 6, 29–31].

Популярным представителем данного класса методов является метод DEA. Он относится к классу *граничных методов*, т.к. основан на построении так называемой *границы эффективности*. С этим понятием связаны такие понятия, как граница производственных возможностей и производственная функция. В случаях, когда выпускается продукция не одного вида, а нескольких, принято говорить не о производственной функции, а о производственной границе, или границе эффективности. В этом случае те объекты, которые производят максимальное количество выпуска из данного количества входов, считаются эффективными, и точки, соответствующие им в пространстве входов/выходов, лежат на этой самой границе эффективности, представляющей собой *выпуклую оболочку точек* в пространстве входов/выходов. Точки, не лежащие на границе эффективности, соответствуют объектам, функционирующим неэффективно. Степень неэффективности определяется степенью удаленности точки от границы эффективности. Поскольку на практике эта граница неизвестна, ее нужно каким-то образом оценить. Для оценивания применяются различные методы, в том числе и метод DEA, формирующий кусочно-линейную границу эффективности.

Рассмотрим кратко суть метода DEA на примере одной из его моделей. Пусть имеются данные для  $K$  входных параметров и  $M$  выходных параметров для каждого из  $N$  однородных объектов (такими объектами могут быть, например, фирмы, банки, университеты). Для  $i$ -го объекта они представлены вектор-столбцами  $x_i$  и  $y_i$  соответственно. Тогда матрица  $X$  размерности  $K \times N$  и матрица  $Y$  размерности  $M \times N$  представляют собой матрицы входных и выходных параметров для всех  $N$  объектов. Можно прийти к задаче математического программирования в такой форме [29]:

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \lambda} & (\theta), \\ & -y_i + Y\lambda \geq 0, \\ & \theta x_i - X\lambda \geq 0, \\ & \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\theta$  – скаляр, а  $\lambda$  является вектором констант размерности  $N \times 1$ . Значение  $\theta$ , полученное при решении задачи, и будет мерой эффективности  $i$ -го объекта. При этом эффективность не может превышать единицы. Аналогичная задача решается  $N$  раз, т.е. для каждого объекта. Те объекты, для которых значение показателя эффективности оказалось равным единице, находятся на так называемой границе эффективности. Для объектов, у которых показатель эффективности оказался меньше единицы, могут быть установлены цели, заключающиеся в пропорциональном сокращении их входных факторов на величину  $\theta$  при сохранении выходных значений на прежнем уровне (либо в пропорциональном увеличении выходных значений при неизменных значениях входных) [29].

Метод DEA имеет ряд привлекательных свойств, в том числе он:

- позволяет вычислить один агрегированный показатель эффективности для каждого объекта, не требуя при этом априорного задания весовых коэффициентов для переменных, используемых в анализе;
- не налагает никаких ограничений на функциональную форму зависимости между входами и выходами, при этом множество эффективных объектов является оптимальным по Парето [31].

Поскольку метод позволяет получить показатель только *относительной* эффективности объектов, то объекты, находящиеся на границе эффективности, также могут улучшить результаты своей работы. Поэтому ранее уже предлагалось формировать искусственную границу эффективности в качестве теоретического эталона для реальных объектов [32, 33].

Настоящая статья является обобщением работ авторов [7, 14–20, 25, 26, 28], в которых излагались отдельные элементы (алгоритмы, методики)

предложенного подхода, основанного на соединении принципов многомерной классификации с методами оценки эффективности. Основная идея этого подхода заключается в использовании метода DEA в качестве механизма для непосредственного проведения классификации сложных объектов в многомерном пространстве входных и выходных переменных, в котором предварительно строятся разделяющие поверхности, имеющие форму выпуклых оболочек. Данный подход может найти применение при создании систем поддержки принятия решений (СППР) при управлении сложными иерархическими системами в социально-экономической сфере.

В развитие идеи относительно формирования искусственной границы эффективности было предложено формировать не одну такую границу, а целый ряд границ. Таким образом, появилась возможность использовать принципы многомерной классификации для разбиения совокупности многомерных объектов на классы, однородные в смысле эффективности. При этом классификацию объектов предлагалось проводить в пространстве входов/выходов. Поскольку искусственная граница эффективности является эталоном, относительно которого производится оценка реальных объектов, возникла необходимость формальной оценки качества этой границы, т.е. некоторых ее формальных свойств, допускающих количественное выражение. Таким образом, был введен критерий качества границы эффективности. Поскольку целью классификации является разбиение совокупности объектов на ряд непересекающихся классов, то, следовательно, возникла необходимость выявления случаев взаимного пересечения искусственных границ эффективности.

Теперь перейдем к описанию основных алгоритмов, используемых для реализации предложенного подхода.

## **1. Построение искусственной многомерной границы эффективности**

Сначала укажем основные отличительные особенности алгоритма формирования искусственной границы эффективности, предложенного в [32, 33]. Они таковы:

- в качестве механизма для формирования искусственных объектов используются модели самого метода DEA с некоторыми модификациями;
- в качестве "исходного материала" для формирования искусственных объектов используются реальные объекты, эффективность которых равна единице;
- число искусственных объектов равно числу реальных объектов, эффективность которых равна единице;



входа; два выхода). В рассматриваемом случае это точки  $A$  и  $C$ . Диагональ  $AC$  прямоугольника  $ABCD$  назовем *базовой*, т.к. частная граница эффективности строится на основе этой диагонали. Соответственно диагональ  $BD$  будет *небазовой*.

**Шаг 3.** Вычислить положение точки  $F$ , используя значение параметра алгоритма. При принятом значении параметра точка  $F$  – середина отрезка  $BE$ . Полученная ломаная линия  $AFC$  будет являться частной границей эффективности, построенной за одну итерацию алгоритма.

**Шаг 4.** Построить прямоугольники  $AGFJ$  и  $FHCL$ . Повторить те же действия, что и на шаге 3, но для вычисления положения точек  $K$  и  $L$  использовать квадрат параметра алгоритма, т.е. значение  $1/4$ . Таким образом,

$|KM| = \frac{|GM|}{4}$  и  $|LN| = \frac{|HN|}{4}$ . Полученная ломаная линия  $AKFLC$  будет являться частной границей эффективности, построенной за две итерации алгоритма.

**Шаг 5.** Построить 4 прямоугольника, диагоналями которых будут являться полученные отрезки  $AK, KF, FL, LC$ . Повторить те же действия, что и на шаге 3, но теперь уже значение параметра будет равно  $1/8$ .

**Шаги 6** и далее. Повторять те же действия, что и на шаге 3, пересчитывая значение параметра алгоритма и получая удвоенное число фрагментов частной границы эффективности. Завершить работу алгоритма при получении заданного числа фрагментов границы.

Результатом работы алгоритма будет множество точек, формирующих частную границу эффективности. Для построения частных границ эффективности в тех случаях, когда рассматриваемыми переменными будут два входа или два выхода, следует соответствующим образом выбрать базовые точки и направление выпуклости границы эффективности.

На основе алгоритма построения частной границы эффективности можно разработать алгоритм более высокого порядка.

*Алгоритм построения искусственной многомерной границы эффективности.*

**Шаг 1.** Задать диапазоны изменения значений двух переменных (это должны сделать эксперты): вход  $x_1 \in [x_1^{\min}; x_1^{\max}]$ , выход  $y_1 \in [y_1^{\min}; y_1^{\max}]$ .

Выбрать базовые точки для построения границы эффективности:  $(x_1^{\min}; y_1^{\min})$ ,  $(x_1^{\max}; y_1^{\max})$ .

Указать число  $n$  фрагментов, из которых должна состоять формируемая частная граница эффективности. Число  $n$  выбирается из ряда 1, 2, 4, 8, ...

**Шаг 2.** Выполнить алгоритм построения частной границы эффективности. В результате будет получено множество точек  $\{(x_1^{\min}; y_1^{\min}), \dots,$

$(x_1^{\max}; y_1^{\max})$ }. Общее число точек равно  $n + 1$ , где  $n$  – требуемое число фрагментов границы на этом этапе.

**Шаг 3.** Выбрать переменную в качестве базы для повышения размерности задачи. Пусть это будет входная переменная  $x_1$ . Этот шаг выполняет эксперт, исходя из содержательных представлений о предметной области.

**Шаг 4.** Заменить переменную  $x_1$  парой переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

Задать диапазоны изменения значений обеих переменных  $x_1 \in [x_1^{\min}; x_1^{\max}]$  и  $x_2 \in [x_2^{\min}; x_2^{\max}]$  для каждой исходной точки  $(x_1; y_1)$ . Базовыми точками для частной границы эффективности будут точки  $(x_1^{\min}; x_2^{\max})$  и  $(x_1^{\max}; x_2^{\min})$ .

Указать требуемое число  $n$  фрагментов частной границы. Число  $n$  выбирается из ряда 1, 2, 4, 8, ...

**Шаг 5.** Выполнить алгоритм построения частной границы эффективности. В результате для каждой исходной точки  $(x_1; y_1)$  будет получено множество из  $n + 1$  точек в пространстве размерности на единицу выше исходной (рис. 1). Здесь  $n$  – требуемое число фрагментов границы на этом этапе.

**Шаг 6.** Если требуется еще повысить размерность задачи, то выбрать следующую переменную в качестве базы для повышения размерности задачи и перейти к шагу 4. Иначе – завершить работу алгоритма.

*Примечание к алгоритму.* Если на шаге 3 или на шаге 6 выбирается выходная переменная, то базовыми точками для частной границы эффективности будут точки  $(y_1^{\min}; y_2^{\max})$  и  $(y_1^{\max}; y_2^{\min})$ .

## **2. Решение задачи классификация на основе искусственной границы эффективности**

Пусть требуется отнести объект  $O_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , к одному из  $N$  классов возможных состояний (классов эффективности). При этом число искусственных границ эффективности будет равно  $N - 1$ , поскольку каждая граница разделяет совокупность объектов на два класса. Верно и то, что каждый класс, кроме первого (самого эффективного) и последнего (наименее эффективного), заключен между двумя искусственными границами эффективности. Будем считать, что для каждой пары искусственных границ эффективности справедливо условие: граница с меньшим индексом соответствует более эффективному (более устойчивому, более "хорошему") классу состояний. Таким образом, граница с индексом 1 соответствует самому эффективному классу состояний. Обозначим искусственную границу эффективности с индексом  $j$

через  $FF_j$ , а класс эффективности, заключенный между двумя границами  $FF_j$  и  $FF_{j+1}$ , через  $E_{j+1}$ . Поскольку первый и последний классы имеют только по одной границе, то их обозначим  $E_1$  и  $E_N$  соответственно. Показатель эффективности объекта  $O_i$ , рассчитанный относительно границы  $FF_j$ , обозначим через  $\theta_{ij}$ . Важно отметить, что при использовании искусственных границ эффективности возможно  $\theta_{ij} > 1$ .

Алгоритм для  $N$  классов возможных состояний объектов будет таким.

**Шаг 1.** Сформировать  $N-1$  наборов искусственных объектов. Каждый набор соответствует искусственной границе для определенного класса состояний изучаемой совокупности объектов. Формирование искусственных объектов может производиться не только алгоритмическим способом, но также и методом опроса экспертов.

**Шаг 2.** Сформировать  $N-1$  комплектов матриц  $Y_j$  и  $X_j$ ; каждая такая пара матриц соответствует определенной границе эффективности  $FF_j$ .

**Шаг 3.** Выбрать модель DEA, исходя из требований конкретной задачи.

**Шаг 4.** Взять реальный объект  $O_i$  из выборки и ввести в модель DEA значения переменных этого объекта – векторы  $y_i$  и  $x_i$ .

**Шаг 5.** Оценить реальный объект  $O_i$  относительно первой искусственной границы эффективности, рассчитав тем самым показатель эффективности  $\theta_{i1}$ .

Если  $\theta_{i1} \geq 1$ , то отнести объект  $O_i$  к классу эффективности  $E_1$ , т.е. к самому эффективному классу.

Если  $\theta_{i1} < 1$ , то перейти к шагу 6 алгоритма.

**Шаг 6.** Увеличить на единицу индекс  $j$  искусственной границы эффективности  $FF_j$ .

Если  $j = N$  (это означает, что больше границ нет), то объект  $O_i$  следует отнести к классу эффективности  $E_N$  (наименее эффективному классу) и перейти к шагу 8.

Если  $j < N$ , то рассчитать значение показателя эффективности  $\theta_{ij}$  относительно границы  $FF_j$  и перейти к шагу 7.

**Шаг 7.** Принять решение относительно состояния (эффективности) объекта  $O_i$  на основе следующего правила:

если  $\theta_{ij} \geq 1$ , то объект  $O_i$  следует отнести к классу эффективности  $E_j$  и перейти к шагу 8;

если  $\theta_{ij} < 1$ , то перейти к шагу 6.

**Шаг 8.** Взять из выборки следующий реальный объект и перейти к шагу 5. Если в выборке больше нет не оцененных объектов, то завершить работу алгоритма, перейдя к шагу 9

### Шаг 9. Завершение работы алгоритма.

Предложенный алгоритм может применяться в самых различных сферах: для оценки уровня знаний студентов, для оценки квалификации работников и т.п. Для удобства интерпретации результатов классифицирования объектов можно каждому классу эффективности  $E_j$  поставить в соответствие словесное наименование. Тем самым получим некоторое подобие лингвистической переменной.

### 3. Критерий качества искусственной границы эффективности

Поскольку эталоном для проведения всех расчетов в методе DEA является граница эффективности, то ее формальные свойства должны, по всей вероятности, влиять на интерпретацию получаемых результатов. Из всех свойств, которыми обладает граница эффективности, наиболее продуктивным в смысле конструирования критерия ее качества представляется наличие фрагментов, параллельных осям координат (см. рис. 2).

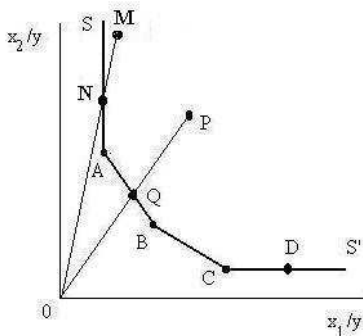


Рис.2. Граница эффективности с ненулевыми дополнительными переменными

На рис. 2 показана граница эффективности для технологии, в которой задействованы два входных фактора и производится один вид продукции при постоянном эффекте масштаба. Поскольку эффект масштаба постоянный, то можно изобразить график в координатах  $(x_1/y, x_2/y)$ . На этом графике ломаная линия  $SS'$  является границей эффективности. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  эффективны. Точка  $P$  неэффективна, при проецировании ее на границу эффективности в качестве целевой точки служит точка  $Q$ . Точка  $D$  лежит на границе, но не является эффективной в смысле Парето-Купманса [30, с. 45]. Неэффективная точка  $M$  проецируется в точку  $N$ , которая также не является эффективной в смысле Парето-Купманса. Для достижения полной эффективности точек  $D$  и



$N$  их нужно переместить вдоль границы эффективности в точки  $C$  и  $A$  соответственно, что позволит уменьшить значение одной из входных переменных без увеличения значения другой входной переменной. В этом случае отрезки  $CD$  и  $AN$  будут являться величинами так называемых *дополнительных переменных* (slacks) [29, 30]. Согласно теории метода DEA, для того чтобы объект был эффективным в смысле Парето-Купманса, необходимо, чтобы он находился на границе эффективности (т.е. имел бы показатель эффективности, равный единице), и при этом дополнительные переменные имели бы нулевые значения по всем измерениям [30, с. 45].

Дополнительные переменные могут иметь ненулевые значения как по входам, так и по выходам, независимо от ориентации модели на вход или на выход. Это объясняется тем, что в качестве ограничений в моделях используются неравенства [29, 30].

На рис. 2 видно, что граница эффективности имеет фрагменты, параллельные осям координат. Как известно из теории метода DEA [29, с. 176], наличие этих фрагментов объясняется малым количеством объектов в выборке и способом построения границы эффективности. При наличии бесконечной выборки граница не была бы кусочно-линейной – она была бы гладкой кривой.

При выработке критерия качества границы эффективности необходимо основываться на том или ином принципе, который определял бы весь ход рассуждений по конструированию критерия. Принцип можно сформулировать в такой форме: разнообразие граничных точек должно быть "не хуже" (не меньше) разнообразия неэффективных точек. Это означает, что неэффективные точки должны проецироваться только на эффективную часть границы эффективности, а не на ее фрагменты, параллельные осям координат. Следовательно, неэффективные точки не должны иметь ненулевых значений дополнительных переменных. Выражаясь формально, для достижения максимального значения критерия качества границы эффективности все точки-проекции должны быть эффективными в смысле Парето-Купманса, т.е. должны отсутствовать ненулевые значения дополнительных переменных. Если же ненулевые значения присутствуют у ряда объектов, то на значение критерия должны влиять не только число таких объектов, но также число переменных, имеющих ненулевые значения (суммарное по всем объектам), а также относительная величина дополнительных переменных (суммарная по всем объектам) по сравнению со значениями соответствующих входных и выходных переменных объектов.

На основании вышесказанного сформулируем следующие показатели для оценки качества границы эффективности [15]:

1. Отношение числа объектов, имеющих ненулевые значения дополнительных переменных (slacks), к общему числу объектов в изучаемой выборке.

2. Отношение фактического числа ненулевых значений дополнительных переменных по всем неэффективным объектам к максимально возможному числу ненулевых значений таких переменных

3. Суммарная относительная величина дополнительных переменных по всем неэффективным объектам.

Поскольку ни один из приведенных показателей в отдельности не дает исчерпывающего описания картины, имеющей место в отношении дополнительных переменных, то было предложено использовать *векторный* критерий, включающий все три показателя.

Опишем порядок расчета предлагаемых показателей векторного критерия, введя предварительно ряд обозначений.

Пусть в выборке присутствуют  $N$  объектов, а число объектов, являющихся эффективными в смысле Парето-Купманса, равно  $N_{PK}$ . Число входных переменных равно  $n_x$ , число выходных переменных –  $n_y$ . Значения дополнительных переменных по  $i$ -ой входной координате и  $j$ -ой выходной координате для объекта с индексом  $k$  равны, соответственно,  $e_i^k$  и  $s_j^k$ . Значения входных и выходных переменных для объекта с индексом  $k$  равны, соответственно,  $x_i^k$  и  $y_j^k$ .

**Показатель 1.** Число объектов, имеющих ненулевые значения дополнительных переменных (slacks), обозначим  $N_s$ . Это значение в общем случае не равно  $N - N_{PK}$ . Тогда значение показателя 1 будет определяться так:

$$K_1 = \frac{N_s}{N}.$$

Диапазон значений этого показателя будет  $[0; 1)$ . Нулевое значение является наилучшим. Оно указывает на полное отсутствие объектов с ненулевыми значениями дополнительных переменных. Рост значения этого показателя указывает на ухудшение качества границы эффективности. В предельном случае может иметь место ситуация, когда на границе окажется всего один объект, и при этом все остальные объекты имеют ненулевые значения дополнительных переменных. Тогда значение показателя будет неограниченно приближаться к единице с увеличением числа объектов в выборке.

**Показатель 2.** Напомним, что ненулевые значения дополнительных переменных возможны одновременно по входным и выходным переменным.

Поэтому максимально возможное число ненулевых значений дополнительных переменных по всем неэффективным объектам равно [15]:

$$S_{\max} = (N - N_{PK}) \cdot (n_x + n_y) .$$

Тогда значение второго показателя предложенного критерия качества границы эффективности будет равно отношению фактического числа ненулевых значений дополнительных переменных по всем неэффективным объектам к максимально возможному числу ненулевых значений таких переменных:

$$K_2 = \frac{S_{\text{факт}}}{S_{\max}} ,$$

где  $S_{\text{факт}}$  – фактическое число ненулевых значений дополнительных переменных по всем неэффективным объектам. Оно определяется по итогам проведенных расчетов показателя эффективности для всех объектов выборки.

Диапазон значений этого показателя будет  $[0; 1]$ . Нулевое значение показателя является наилучшим, а значение, равное единице, – наихудшим. Если значение показателя равно единице, то это означает, что *все* (сколько бы их ни было) неэффективные объекты имеют ненулевые значения дополнительных переменных по *всем* входам и выходам.

**Показатель 3.** Для его вычисления просуммируем по всем объектам в выборке отношения значений дополнительных переменных к фактическим значениям соответствующих переменных. Получим (обозначения см. выше):

$$K_3 = \sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=1}^{n_x} \frac{e_i^k}{x_i^k} + \sum_{j=1}^{n_y} \frac{s_j^k}{y_j^k} \right) .$$

Диапазон значений этого показателя будет  $[0; +\infty)$ . Нулевое значение показателя является наилучшим, оно возможно только при полном отсутствии объектов с ненулевыми значениями дополнительных переменных.

Особенностью предложенного критерия является то, что его можно вычислить только *после* проведения оценки эффективности всех объектов в изучаемой выборке. Такой критерий можно назвать *апостериорным*. Значения критерия, вычисленные для одной и той же выборки объектов, могут различаться в зависимости от ориентации модели на вход или на выход.

Предложенный критерий качества границы эффективности выполня-

ет функцию, аналогичную проверкам статистических гипотез в статистике. Его можно с некоторой долей условности сравнить, например, с коэффициентом детерминации  $R^2$ , который используется для анализа общего качества оцененного уравнения линейной регрессии [8]. Критерий может использоваться не только при работе с искусственными объектами, но также и с реальными объектами.

**Скаляризация векторного критерия.** Для того чтобы из ряда искусственных границ эффективности, построенных разными экспертами, выбрать лучшую (лучшие), можно воспользоваться возможностями самого же метода DEA. С этой целью необходимо сформировать выборку объектов, которыми будут являться различные экземпляры векторного критерия. В качестве входных переменных следует использовать три показателя векторного критерия, поскольку все эти показатели подчиняются правилу "чем меньше значение, тем лучше". Специфика метода DEA требует наличия хотя бы одной выходной переменной, поэтому в качестве выходной переменной следует использовать унифицированный выходной показатель, которому присваивается значение 1 для всех исследуемых объектов [30, с. 169–174]. Поскольку выдавать рекомендации по увеличению значений выходной переменной нет смысла, и поскольку значение этой переменной равно единице для всех объектов в выборке, то следует выбирать модель метода DEA, ориентированную на вход с условием постоянного эффекта масштаба, т.е. модель (1).

После решения этой модели для всех полученных экземпляров критерия качества искусственной границы эффективности на основании значений интегрального показателя эффективности  $\theta$  можно выбрать одну (или несколько) границ для использования.

#### **4. Распознавание случаев взаимного пересечения искусственных границ эффективности**

Целью построения искусственных границ эффективности является разделение совокупности исследуемых объектов на ряд *непересекающихся* классов. Поэтому важной задачей является распознавание случаев взаимного пересечения построенных границ. Предложенный алгоритм таков.

**Шаг 1.** Сформировать матрицы входов  $X$  и выходов  $Y$  для модели, например, (1) на основе точек любой из двух исследуемых границ. Назовем эту границу базовой, тогда другая граница будет небазовой.

**Шаг 2.** Оценить эффективность всех эффективных точек небазовой границы относительно базовой границы, формируя векторы  $x_i$  и  $y_i$  в модели (1) поочередно из координат точек небазовой границы.

**Шаг 3.** Принять решение относительно взаимного пересечения двух

границ на основе правила:

если  $\theta_i > 1$ ,  $\forall i$  или  $\theta_i < 1$ ,  $\forall i$ , то границы взаимно не пересекаются;

если  $\exists i: \theta_i > 1$  и  $\exists i: \theta_i < 1$ , то границы взаимно пересекаются.

Число попарных сопоставлений границ, требуемых для получения полной информации обо всех случаях их взаимного пересечения, будет равно числу сочетаний из  $N$  по 2 [4, с. 203], поскольку порядок границ внутри пары не имеет значения:

$$C_N^2 = \frac{N!}{2!(N-2)!},$$

где  $N$  – общее число искусственных границ эффективности.

Если взаимных пересечений границ нет, то система искусственных границ позволит разделить всю совокупность реальных объектов на непересекающиеся классы. Если взаимные пересечения границ имеют место, следует от них избавиться путем реформирования в первую очередь тех границ, которые имеют наибольшее число пересечений с другими границами.

## **5. Методика оценки эффективности функционирования иерархических (матрично-иерархических) систем**

Изучение процессов, протекающих в сложных системах, всегда было актуальной задачей (см., например, [3, 9, 10, 12, 13, 22, 23, 27]). При этом одно из центральных мест в таких исследованиях занимали вопросы оценки эффективности функционирования систем (см., например, [1, 6, 9, 11]).

Значительная часть систем в окружающем нас мире имеет иерархический характер [2, 5, 9, 12, 21]. Кроме того, одним из способов организации систем является использование матричной структуры взаимосвязей элементов [2, 5]. Таким образом, можно прийти к *матрично-иерархической* структуре, которую имеют многие системы в экономике и технике. В качестве примера можно привести структуру экономики страны. Территориальная структура имеет целый ряд уровней иерархии – от уровня страны до муниципального образования. Отраслевая структура также имеет иерархический характер – от уровня сфер экономики до специализированных бригад или рабочих групп. Кроме того, на каждом уровне территориальной иерархии можно рассмотреть отраслевую структуру, придав, таким образом, к структуре матричной. В целом можно говорить о матрично-иерархической структуре экономики страны. Для оценки эффективности функционирования подобных систем хорошо подходит метод DEA. Применяя данный метод на различных уровнях

иерархии системы, можно выявить не только уровень эффективности всей системы, но также установить, условно говоря, внутреннюю структуру этого уровня. В работах [16, 25] предложена методика оценки эффективности функционирования иерархических (матрично-иерархических) систем.

1. В случае рассматриваемых матрично-иерархических структур целесообразным будет разделение системы на уровни в двух направлениях: условно говоря, территориальном и отраслевом. Условность имеет место потому, что не все реальные системы, имеющие матрично-иерархическую структуру, разделены именно на территории и отрасли.

2. Исследуя эффективность функционирования какого-либо объекта (региона страны, отрасли экономики и т.п.), следует оценивать ее с двух сторон – с внешней и с внутренней. Под *оценкой с внешней стороны* подразумевается оценка объекта в группе подобных ему объектов. В этом случае объект рассматривается как единое целое. Под *оценкой с внутренней стороны* подразумевается оценка эффективности функционирования *элементов*, составляющих этот объект. Окончательные выводы относительно эффективности изучаемого объекта можно делать при сопоставлении результатов этих двух оценок. Применение метода DEA на разных уровнях иерархии в сложной системе позволит провести такую оценку.

3. Поскольку метод DEA дает значение показателя *относительной* эффективности, то для сравнения объектов из различных подсистем одного уровня иерархии необходимо выбрать один из двух способов:

– объединить объекты в одну общую выборку (что не всегда может быть возможным) и решать задачу DEA для нее;

– сформировать искусственную границу (множество границ) эффективности, относительно которой и следует оценивать эффективность объектов из различных выборок (подсистем).

4. При большом числе уровней иерархии в системе можно использовать дисперсию показателей эффективности, рассчитанную для каждой подсистемы, в качестве меры однородности достигнутого уровня эффективности всей системы: чем больше величина средней дисперсии показателей эффективности в подсистемах, тем вся система в целом менее устойчива и менее эффективна.

5. Если при оценке эффективности подсистем использовались искусственные границы эффективности, то можно вычислять среднюю эффективность подсистем всей системы: чем более равномерно развиты подсистемы, тем, при прочих равных условиях, система будет устойчивее.

6. Метод DEA требует разделения показателей на входные и выходные, но логика предметной области не всегда позволяет произвести такое разделение обоснованно. В таком случае следует искусственно относить к

*входным* показателям те из них, для которых желательно уменьшение их значений, а к *выходным* – те, для которых желательно увеличение их значений. Те показатели, на которые невозможно влиять на рассматриваемом уровне иерархии системы, следует отнести к переменным окружающей среды. Такие переменные учитываются в моделях метода DEA при проведении расчетов и оказывают влияние на их результаты, но по самим этим переменным никаких рекомендаций не выдается.

Предложенная методика может применяться в различных сферах, в частности, для оценки уровня региональной экономической безопасности [25], эффективности систем здравоохранения [28] и образования [17].

## **6. Возможные направления дальнейшего развития предложенного подхода многомерной классификации на основе оценки эффективности сложных объектов**

Перечень возможных направлений развития данного подхода не претендует на полноту и завершенность, тем не менее, на наш взгляд, имеет смысл составить его хотя бы в первом приближении. Итак:

1. Поскольку предложенный алгоритм построения многомерной искусственной границы эффективности весьма схематичен, то он не отражает специфику конкретной предметной области, для которой может строиться искусственная граница эффективности. Следовательно, необходимо разработать типовые алгоритмы для учета специфики ряда предметных областей, например, на основе такого показателя, как коэффициент эластичности замещения факторов производства. При этом необходимо каким-то образом выделять на сформированной границе эффективности (которая в общем случае может представлять собой криволинейную гиперповерхность в многомерном пространстве входов/выходов) ряд точек, на основе которых будут формироваться матрицы показателей искусственных эталонных объектов (матрицы  $X$  и  $Y$  в модели (1)).

2. Слишком велика роль экспертов при построении искусственной границы эффективности. Видимо, имеет смысл разработать более формализованный подход с элементами самонастройки алгоритма формирования этой границы. Также важно иметь формализованную процедуру определения очередности выбора входных и выходных переменных в алгоритме поэтапного формирования многомерной границы эффективности.

3. Формируемая искусственная граница эффективности является детерминированной. Представляется целесообразным учитывать стохастический характер реальных процессов и объектов при построении искусственных границ эффективности.

4. Необходимо проводить формальное доказательство того, что все искусственные объекты, формируемые при помощи предлагаемых (в том числе и в будущем) алгоритмов построения искусственной границы эффективности, будут являться Парето-оптимальными. Наличие искусственных объектов, не являющихся Парето-оптимальными, будет ухудшать качество искусственной границы эффективности (в смысле того или иного формального критерия качества), а также приводить к избыточным вычислениям, замедляющим работу.

5. Необходимо провести сравнительное исследование предложенного подхода многомерной классификации на основе метода DEA и традиционных методов классификации с помощью метода статистического моделирования.

6. Поскольку в общем случае возможны различные варианты разбиения совокупности объектов на классы, эквивалентные в смысле эффективности, то необходимо разработать формальный критерий оценивания качества такого разбиения.

7. Критерий качества искусственной границы эффективности рассчитывается только *после* определения эффективности всех объектов в выборке, что требует дополнительной вычислительной работы при выборе границы эффективности, наилучшей в смысле этого критерия. Весьма желательно предложить и обосновать *априорный* критерий, вычисление значения которого не требовало бы предварительного определения эффективности всех объектов в выборке. Такой критерий, возможно, будет строиться на основе знаний о специфике конкретной предметной области и взаимосвязях переменных в ней.

8. Задача распознавания случаев взаимного пересечения искусственных границ эффективности решается методом *полного перебора* попарных комбинаций границ. Это может потребовать значительных вычислительных ресурсов при большом числе искусственных границ эффективности и высокой размерности пространства входов/выходов. Возможно, что более рациональное решение этой задачи следует искать за рамками непосредственно метода DEA. При этом алгоритм должен выдавать рекомендации по первоочередному реформированию взаимно пересекающихся искусственных границ с тем, чтобы объем вычислительной работы, а также работы экспертов был минимальным.

9. Необходимо формализовать методику оценки эффективности сложных иерархических систем, разработав алгоритмы получения интегрального показателя эффективности для систем такого рода.



## Литература

1. Анализ эффективности функционирования сложных систем / В.Е. Кривоножко, А.И. Пропой, Р.В. Сеньков, И.В. Родченков, П.М. Анохин // Автоматизация проектирования.– 1999.– № 1.– С. 2–7.
2. Анфилатов, В.С. Системный анализ в управлении: Учеб. пособие / В.С. Анфилатов, А.А. Емельянов, А.А. Кукушкин; Под ред. А.А. Емельянова.– М.: Финансы и статистика, 2002.– 368 с.
3. Бир, С. Мозг фирмы: Пер. с англ. / С. Бир.– М.: Радио и связь, 1993.– 416 с.
4. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев.– М.: Наука, 1980.– 976 с.
5. Волкова, В.Н. Основы теории систем и системного анализа: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности "Системный анализ и управление" / В.Н. Волкова, А.А. Денисов.– 2-е изд., перераб. и доп.– СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001.– 512 с.
6. Выгон, Г.В. Анализ связи технологической эффективности и рыночной капитализации компаний / Г.В. Выгон, А.Б. Поманский // Экономика и математические методы.– 2000.– Т. 36, № 2.– С. 70–87.
7. Дорофеева, Ю.В. Система обеспечения экономической безопасности региона / Ю.В. Дорофеева, Д.Е. Кацик, Е.П. Моргунов, А.И. Смирнов // Вестник НИИ СУВПТ: Информационные технологии и адаптация: Сб. научн. трудов / Под общей ред. профессора Н.В. Василенко.– Красноярск: НИИ СУВПТ, 2002.– С. 195–208.
8. Замков, О.О. Математические методы в экономике: Учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных.– 2-е изд.– М: МГУ им. М.В. Ломоносова: Издательство "Дело и Сервис", 1999.– 368 с.
9. Капица, С.П. Синергетика и прогнозы будущего / С.П. Капица, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий.– 2-е изд.– М.: Эдиториал УРСС, 2001.– 288 с.
10. Клир, Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач: Пер. с англ. / Дж. Клир.– М.: Радио и связь, 1990.– 544 с.
11. Мезоэкономика переходного периода: Рынки, отрасли, предприятия / Под ред. Г.Б. Клейнера.– М.: Наука, 2001.– 516 с.
12. Могилевский, В.Д. Методология систем: вербальный подход / В.Д. Могилевский.– М.: Экономика, 1999.– 251 с.
13. Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / Под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой.– М.: Наука, 2001.– 175 с.
14. Моргунов, Е.П. Граничные методы определения эффективности функционирования предприятий / Е.П. Моргунов // Информатика и системы

управления: Межвузовский сборник научных трудов / Отв. редактор Б.П. Соустин.– Красноярск: НИИ ИПУ, 2000.– С. 204–209.

15. Моргунов, Е.П. Подходы к построению критерия качества границы эффективности в методе Data Envelopment Analysis / Е.П. Моргунов // Актуальные проблемы современной науки и пути их решения: Материалы III межвузовской научной конференции аспирантов / КГТЭИ.– Красноярск, 2003.– С. 86–88.

16. Моргунов, Е.П. Система поддержки принятия решений для оценки уровня региональной экономической безопасности / Е.П. Моргунов // Вестник НИИ СУВПТ: Сб. научн. трудов / Под общей ред. профессора Н.В. Василенко.– Красноярск: НИИ СУВПТ, 2003.– (Вып. 12).– С. 197–198.

17. Моргунов, Е.П. Применение метода Data Envelopment Analysis в управлении системой образования / Е.П. Моргунов, О.Н. Моргунова // Развитие системы образования в России XXI века: Материалы междунар. науч.-метод. конф. / Краснояр. гос. ун-т.– Красноярск, 2003.– С. 190–192.

18. Моргунов, Е.П. Применение метода Data Envelopment Analysis для управления качеством подготовки специалистов в университетских комплексах инженерного профиля / Е.П. Моргунов, О.Н. Моргунова // Актуальные проблемы и перспективы развития университетских комплексов инженерного профиля: Материалы Всерос. научн.-метод. конф. (15–16 мая 2003, г. Красноярск) / СибГАУ.– Красноярск, 2003.– С. 132–133.

19. Моргунов, Е.П. Формирование искусственной границы эффективности в методе Data Envelopment Analysis / Е.П. Моргунов, О.Н. Моргунова // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева: Сб. научн. трудов / Под общей ред. профессора Г.П. Белякова.– Красноярск: СибГАУ, 2003.– С. 385–386.

20. Моргунов, Е.П. Использование метода Data Envelopment Analysis в анализе деятельности лечебно-профилактических учреждений / Е.П. Моргунов, А.С. Ямщиков // Проблемы и перспективы российской экономики: Сборник статей / Под ред. профессора В.Д. Дорофеева.– Пенза, 2002.– С. 257–259.

21. Мухин, В.И. Исследование систем управления: Учебник для вузов / В.И. Мухин.– М.: Экзамен, 2003.– 384 с.

22. Прангишвили, И.В. Системный подход и общесистемные закономерности / И.В. Прангишвили.– М.: Синтез, 2000.– 528 с.

23. Прангишвили, И.В. Энтропийные и другие системные закономерности: Вопросы управления сложными системами / И.В. Прангишвили; Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова.– М.: Наука, 2003.– 428 с.

24. Прикладная статистика. Основы эконометрики: Учебник для вузов: В 2 т. – 2-е изд., испр.– Т.1: Айвазян, С.А. Теория вероятностей и при-

кладная статистика / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян.– М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2001.– 656 с.

25. Регион в системе внешнеэкономических связей: проблемы безопасности: Монография / В.И. Лячин, Н.В. Фирюлина, А.И. Смирнов, Д.Е. Кацик, Е.П. Моргунов; Гос. образоват. учреждение "ГАЦМиЗ".– Красноярск, 2003.– 204 с.

26. Смирнов, А.И. Разработка системы мониторинга внешнеэкономической безопасности региона / А.И. Смирнов, Е.П. Моргунов, Д.Е. Кацик // Вестник НИИ СУВПТ: Сб. научн. трудов / Под общей ред. профессора Н.В. Василенко. – Красноярск: НИИ СУВПТ, 2003.– (Вып. 11).– С. 57–79.

27. Цыгичко, В.Н. Руководителю – о принятии решений / В.Н. Цыгичко.– М.: Финансы и статистика, 1991.– 240 с.

28. Ямщиков, А.С. Применение метода Data Envelopment Analysis для оценки эффективности функционирования лечебно-профилактических учреждений г. Красноярска / А.С. Ямщиков, Е.В. Килина, Е.П. Моргунов // Сб. трудов конференции "Информационные недра Кузбасса – 2003".– Кемерово, 2003.– С. 230–232.

29. Coelli, T. An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis / T. Coelli, D.S. Prasada Rao, G.E. Battese.– Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.– 275 pp.

30. Cooper, W.W. Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References, and DEA-Solver Software / W.W. Cooper, L.M. Seiford, K. Tone.– Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.– 318 pp.

31. Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology, and Application / A. Charnes, W.W. Cooper, A.Y. Lewin, L.M. Seiford.– Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994.– 513 pp.

32. Sowlati, T. Establishing the Practical Frontier in DEA: Ph.D. dissertation / T. Sowlati.– University of Toronto, Canada, 2001.

33. Sowlati, T. Establishing the "Practical Frontier" in Data Envelopment Analysis / T. Sowlati, J.C. Paradi // Efficiency and Productivity Analysis in the 21<sup>st</sup> Century: Abstracts of International DEA Symposium (24–26 June 2002, Moscow, Russia) / Institute for Systems Analysis of Russian Academy of Sciences; Global S. Consulting Company.– Moscow: International Research Institute of Management Sciences, 2002.– Pp. 32–33.